



## Esistenza del modo O in piastre tridimensionali con fori circolari ed ellittici soggette a modo II

### On the mode O existence in three-dimensional plates weakened by circular and elliptical holes under mode II loading

Filippo Berto, Christian Marangon

*Università di Padova, Dipartimento di tecnica e gestione dei sistemi industriali, Stradella S.Nicola 3, 36100 Vicenza (Italy)*  
berto@gest.unipd.it

---

**ABSTRACT.** It is known for long time that in a cracked plate subjected to anti-symmetric plane loading, the Poisson's effect leads to the generation of a coupled out-of-plane singular mode (Mode O). Recent theoretical and numerical analyses have shown that this effect is present also in plates weakened by pointed V-notches and might play a role in failure initiation phenomena in plates under mode II loading particularly in the presence of large opening angle. Since the degree of singularity characterising the mode O is greater than that of mode II, the mutual incidence of the two modes depends on the component size.

Dealing with circular and elliptic holes, the presence or not of the out-of-plane mode has never been discussed in the literature. The main aim of this work is to demonstrate the existence of a three-dimensional effect tied to mode O. On the basis of a large bulk of numerical results the following conclusions can be drawn:

- An out-of-plane mode is present in plates weakened by U-notches and subjected to Mode II loading, as previously demonstrated for plates weakened by cracks and pointed V-notches; its intensity is not negligible also for finite values of the notch radius.
- Out-of-plane mode results in a shear stress distribution symmetric with respect to the mid-plane. The intensity of this stress component strongly depends on the Poisson's ratio  $\nu$ . It increases as  $\nu$  increases.
- The strain energy density averaged on a given control volume which should, in principle, be material dependent is a parameter suitable for the natural of capture all three dimensional effects occurring through the plate thickness. It is surely a powerful tool in practical cases where the role played by three-dimensionality is not negligible, or is not known in detail.

**RIASSUNTO.** Il problema di una piastra criccata tridimensionale soggetta a modo II è stato affrontato in letteratura dimostrando che l'effetto del coefficiente di Poisson provoca l'insorgere di una nuova singolarità accoppiata al carico esterno applicato e non contemplata dalla soluzione piana di Williams.

Recenti analisi teoriche e numeriche hanno evidenziato come questo effetto tridimensionale sia presente anche in piastre intagliate a spigolo vivo. Il nuovo modo (denominato modo O) rimane singolare anche per angoli di apertura dell'intaglio maggiori di  $102.6^\circ$  e cioè quando il modo II risulta essere non singolare. Tutte le analisi fino ad ora effettuate hanno riguardato piastre indebolite da cricche o intagli a spigolo vivo non considerando l'effetto di un raggio di raccordo diverso da zero all'apice dell'intaglio.

---



L'obiettivo del presente contributo è quello di dimostrare che il modo O è presente anche in piastre tridimensionali indebolite da intagli raccordati e soggette a modo II. Si sono quindi analizzate piastre con fori circolari ed ellittici variando sia la geometria dell'intaglio sia il valore del coefficiente di Poisson.

**KEYWORDS.** Three-dimensional effects; Out-of-plane mode; Mode II; Mode O.

## INTRODUZIONE

Il problema della determinazione dei campi di tensione in componenti tridimensionali indeboliti da cricche e intagli risulta poco agevole e le soluzioni analitiche in forma chiusa riguardano solo casi caratterizzati da geometrie molto semplici. Nella pratica si ricorre a teorie piane che utilizzano le ipotesi di tensione piana o deformazione piana e che trascurano a priori gli effetti tridimensionali presenti nel componente.

Nelle applicazioni lo stato di tensione è legato allo spessore del componente tramite una semplice regola. Se la piastra è sottile, lo stato di tensione è generalmente considerato di tensione piana, se invece la piastra è caratterizzata da uno spessore non trascurabile rispetto alle altre dimensioni del componente si considera valida l'ipotesi di deformazione piana. Tuttavia, non vi è alcun criterio che permetta di distinguere quale sia lo spessore limite per cui utilizzare l'una o l'altra ipotesi.

Per considerare l'effetto tridimensionale legato alla finitezza dello spessore della piastra è molto diffuso in letteratura l'utilizzo dell'ipotesi di deformazione piana generalizzata [1]. Questa ipotesi, che considera lineare l'andamento dello spostamento  $u_z$  lungo lo spessore della piastra, produce buone approssimazioni dello stato tensionale in componenti tridimensionali, come ampiamente dimostrato nelle referenze [2, 3]. Negli ultimi anni sono state condotte molte analisi numeriche su piastre tridimensionali intagliate soggette a prevalente modo I con lo scopo di ottenere la distribuzione di tensione reale lungo lo spessore del componente [4, 5]. La variazione del fattore teorico di concentrazione delle tensioni in funzione dello spessore è stata ampiamente discussa nelle referenze [5-7], nelle quali è stata analizzata anche l'influenza del coefficiente di Poisson per piastre indebolite da fori ellittici e soggette a modo I.

Una revisione completa dei principali risultati analitici, numerici e sperimentali ottenuti fino ad ora e riguardanti gli effetti tridimensionali in piastre intagliate e criccate è stata recentemente condotta da Kotousov *et al.*[8].

I primi ricercatori che si interessarono degli effetti tridimensionali su piastre criccate furono Hartranft e Sih [9] che considerarono i casi di trazione e flessione. Le equazioni ottenute descrivevano la variazione delle tensioni attraverso lo spessore del piatto in funzione della dimensione del difetto e dello spessore stesso.

Benthem (1977) notò per primo che la singolarità nel piano scompariva quando il fronte di cricca intersecava la superficie libera del componente [10]. In questo piano nasceva invece una nuova singolarità tridimensionale all'apice dell'intaglio. Questo effetto, documentato anche in altri contributi (tra gli altri da Bazant ed Estenssoro [11], Pook [12], She e Guo [13], Yu *et al.*[14]), è stato recentemente analizzato con riferimento a problemi di resistenza a fatica [15].

In relazione a piastre criccate soggette a modo II, le prime analisi furono condotte da Nakamura e Parks [16] i quali documentarono per la prima volta la presenza in piastre sottili di un modo singolare non contemplato dalla soluzione piana di Williams. Recentemente, l'insorgere del nuovo modo singolare è stato evidenziato anche in piastre criccate di spessore finito [17-20]. In particolare, Kotousov, utilizzando la teoria della deformazione piana generalizzata, ha ottenuto in forma chiusa l'equazione agli autovalori per il modo "out of plane" che è stato chiamato dallo stesso autore "modo O". Kotousov ha dimostrato inoltre che l'intensità dei campi di tensione legati al nuovo modo risultava influenzata dal coefficiente di Poisson ed in particolare aumentava all'aumentare di quest'ultimo [19-20]. In Fig. 1 è mostrato schematicamente come il modo O si generi in una piastra tridimensionale criccata soggetta a taglio. Dalla figura si può notare come il modo O sia simile al modo III ma a differenza di quest'ultimo esso sia simmetrico rispetto al piano medio della piastra.

La presenza del nuovo modo singolare è stato documentato anche in piastre indebolite da intagli a V a spigolo vivo e in giunti saldati a sovrapposizione dove il modo II risultava predominante rispetto al modo I [21].

Per quanto riguarda invece i componenti tridimensionali indeboliti da intagli raccordati e soggetti a prevalente modo II gli effetti tridimensionali di volume legati al modo O non sono mai stati analizzati. Lo scopo del presente contributo è proprio quello di colmare questa lacuna analizzando per geometrie semplici, quali piastre tridimensionali con fori circolari ed ellittici soggette a modo II, l'esistenza del modo O e di valutarne l'intensità considerando anche l'influenza del

coefficiente di Poisson. Il modo O, in caso di intagli ad U e a V iperbolici e parabolici, è stato ampiamente analizzato in un lavoro in corso di revisione [22].

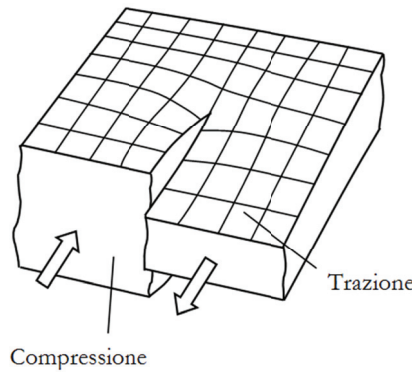


Figura 1: Rappresentazione schematica dell'effetto "out of plane".  
Schematic representation of the "out of plane" effect.

### GEOMETRIE ANALIZZATE E MODALITÀ DI APPLICAZIONE DEI CARICHI

Le geometrie analizzate nel presente contributo e i principali parametri geometrici sono mostrati in Fig. 2. Nel caso di piastra soggetta a foro circolare sono stati considerati i seguenti parametri geometrici e di materiale:

- Raggio del foro  $a=b=1, 5, 10, 20$  mm;
- Spessore del piatto  $2t = 40$  mm;
- Larghezza del piatto  $W = 200$  mm;
- Coefficiente di Poisson  $\nu = 0, 0.1, 0.3$  e  $0.5$ .

Nel caso di piastra soggetta a foro ellittico, invece, sono stati considerati i seguenti parametri:

- Rapporto tra i semiassi dell'ellisse  $a/b=5, 10, 20$  (con  $b=1$  mm)
- Spessore del piatto  $2t = 40$  mm;
- Larghezza del piatto  $W = 200$  mm;
- Coefficiente di Poisson  $\nu = 0, 0.1, 0.3$  e  $0.5$ .

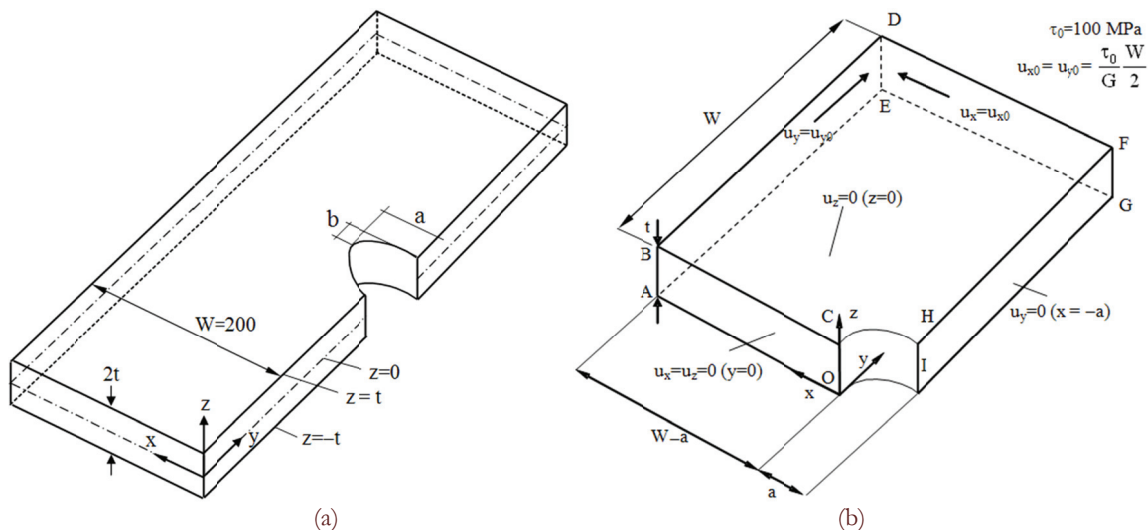


Figura 2: (a) Piastra tridimensionale con fori circolari ed ellittici;  
(b) condizioni al contorno applicate al modello sfruttando i piani di simmetria esistenti.  
(a) Three-dimensional plate weakened by circular and elliptic holes;  
(b) constraint conditions applied to the model taking advantage of the double symmetry.



La piastra è stata sollecitata opportunamente mediante degli spostamenti che garantissero un carico nominale di modo II. La geometria del componente analizzato è riportata in Fig. 2a. Sfruttando le simmetrie presenti nel modello è stato possibile analizzare solamente un quarto della piastra di partenza (Fig. 2b). L'origine del sistema di riferimento cartesiano  $(x,y,z)$  è situata sul piano medio del modello, come mostrato in Fig. 2a. Opportune condizioni al contorno sono state imposte sui piani di simmetria del modello. Sull'area trasversale OABC sono stati vincolati gli spostamenti nodali in direzione  $x$  e  $z$  ( $u_x=0$  e  $u_z=0$ ). Sul piano medio invece sono stati vincolati solamente gli spostamenti lungo la coordinata  $z$ . Infine sulla superficie laterale GFHI sono stati bloccati gli spostamenti  $u_y$ . Per imporre una sollecitazione nominale di modo II pari a  $\tau_0=100$  MPa, sono stati applicati degli spostamenti sui nodi appartenenti alle aree ABDE e DEGF. L'intensità degli spostamenti applicati è data dalla seguente espressione:

$$u_{x0} = u_{y0} = \frac{\tau_0}{G} \times \frac{W}{2} \quad (1)$$

Nell'Eq.(1)  $G$  rappresenta il modulo di elasticità tangenziale,  $G = E/2(1+\nu)$ .

Un esempio della mesh utilizzata per le analisi numeriche è mostrata nelle Fig. 3a e b. Sono stati utilizzati gli elementi a 20 nodi "solid 95" ed il codice di calcolo Ansys 12.0®.

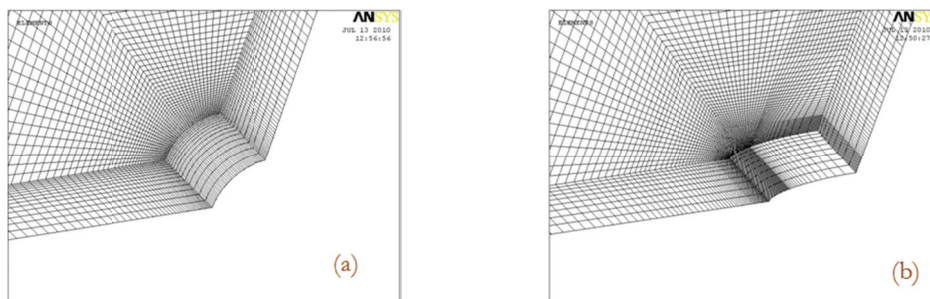


Figura 3: Discretizzazione utilizzata nelle analisi numeriche: (a) foro circolare; (b) foro ellittico. Mesh used in the numerical analyses: (a) Circular hole; (b) Elliptic hole.

## RISULTATI DELLE ANALISI NUMERICHE

Per i fori circolari ed ellittici, le Fig. 4a e 4b riportano la distribuzione delle tensioni  $\tau_{yz}$  (legate al modo O) attraverso lo spessore del modello. Il picco di tensione si posiziona all'apice dell'intaglio lungo la sua bisettrice ed è prossimo alla superficie libera del componente. Tale componente di tensione non è contemplata dai modelli piani.

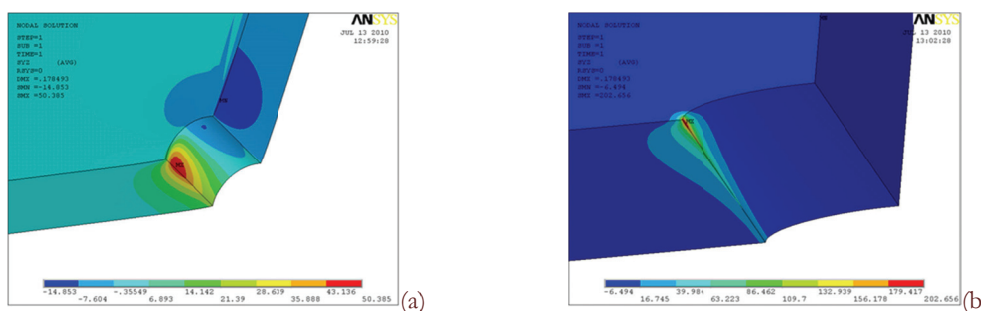


Figura 4: Distribuzione della tensione  $\tau_{yz}$ , legata al modo O, per piastre indebolite da fori circolari (a) e fori ellittici (b).  $\tau_{yz}$  stress distribution, tied to mode O, in plates weakened by circular holes (a) and elliptic holes (b).

Le Fig. 5a e 5b riportano invece l'andamento, attraverso lo spessore del modello, delle tensioni  $\tau_{yz}$ , normalizzate rispetto al valore massimo della tensione principale  $\sigma_1$ . Tale tensione risulta massima al di fuori della bisettrice dell'intaglio mentre la tensione  $\tau_{yz}$ , generata dal modo O, raggiunge il suo valore massimo lungo la bisettrice dell'intaglio. Entrambe le tensioni

risultano massime attraverso lo spessore ad una distanza dalla superficie libera variabile e che dipende dai parametri geometrici del modello. Le figure fanno riferimento ad un coefficiente di Poisson  $\nu=0.3$ .

In Fig. 5a, relativa alla piastra con foro circolare, è possibile notare come al diminuire della dimensione del diametro del foro le tensioni aumentino di intensità e il punto di picco si sposti sempre più verso la superficie libera del modello. Nel caso riguardante il foro ellittico (Fig. 5b), l'intensità delle tensioni risulta influenzata dalle dimensioni del foro e in particolare dal rapporto dei semiassi dell'ellisse stessa. Il punto in cui la tensione  $\tau_{yz}$ , legata al modo O, raggiunge il suo valore massimo rimane sempre in prossimità della superficie libera del componente.

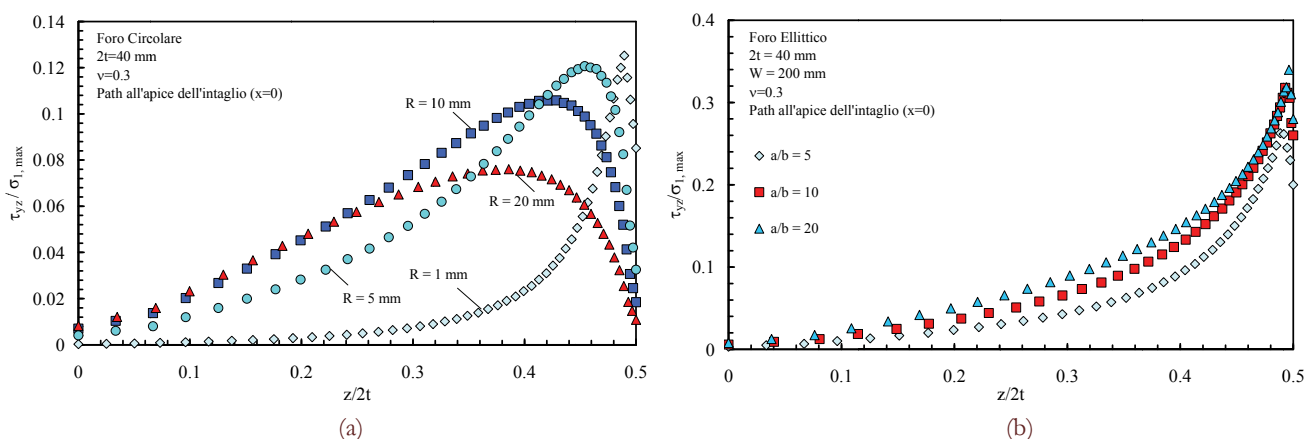


Figura 5: Andamento, attraverso lo spessore, delle tensioni fuori dal piano normalizzate rispetto al valore massimo della tensione principale; fori circolari (a) e fori ellittici (b).  
 Through-the-thickness stress distribution normalised by the maximum value of the principal stress; circular holes (a) and elliptic holes (b).

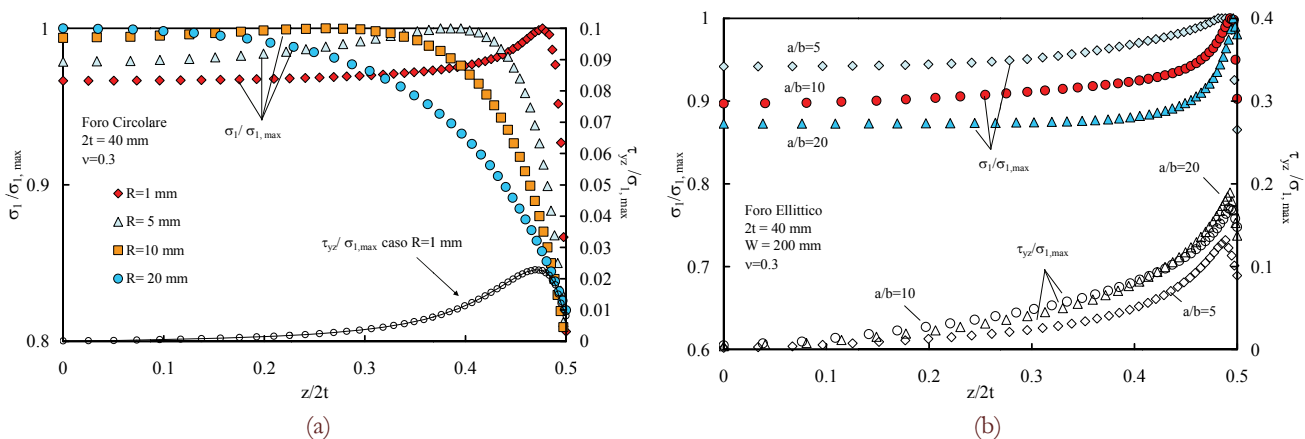


Figura 6: Tensione principale  $\sigma_1$  e tensioni  $\tau_{yz}$  di modo O normalizzate rispetto al valore massimo della tensione principale. Entrambi gli andamenti sono plottati attraverso lo spessore del materiale ma al di fuori dalla bisettrice dell'intaglio, lungo la linea in cui  $\sigma_1$  raggiunge il suo valore di massimo; fori circolari (a), fori ellittici (b).  
 Principal stress,  $\sigma_1$ , and mode O stress,  $\tau_{yz}$ , normalized by the maximum value of the principal stress. The stresses are plotted through the thickness and out of the bisector along the line of maximum principal stress.

Le Fig. 6a e 6b mostrano l'andamento delle tensioni fuori dal piano,  $\tau_{yz}$ , e della tensione principale  $\sigma_1$  normalizzate rispetto al valore massimo della tensione principale. Entrambe le tensioni sono plottate al di fuori dalla bisettrice dell'intaglio lungo la linea in cui  $\sigma_1$  assume il suo valore massimo.

La Fig. 6a mostra come, al variare del diametro del foro, il punto di picco della tensione principale vari attraverso lo spessore. Per  $R=1$  mm e  $2t=40$  mm, il massimo della tensione  $\sigma_1$  risulta essere in una zona molto prossima alla superficie libera mentre, per raggi più ampi, il punto di picco trasla attraverso lo spessore, fino a situarsi sul piano medio del modello

nel caso del raggio di raccordo più ampio ( $R=20$  mm e  $2t=40$  mm). La componente di tensione  $\tau_{yz}$  al di fuori della bisettrice può ritenersi invece trascurabile, essendo il valore del rapporto  $\tau_{yz}/\sigma_1$  inferiore al 5% in tutto il campo di analisi. Nel caso di piastre indebolite da un foro ellittico (Fig. 6b), l'andamento della tensione  $\sigma_1$  risente dell'influenza delle dimensioni del difetto solo lontano dalla zona in cui essa raggiunge il valore massimo, mentre il punto di picco è sempre situato nell'immediato sottopelle, vicino alla superficie libera della piastra. La componente di tensione  $\tau_{yz}$  presenta in tutti i casi considerati un valore di massimo in prossimità della superficie libera, la cui intensità dipende dal rapporto  $a/b$  fra i semiassi dell'ellisse. Quest'ultima non risulta trascurabile al di fuori della bisettrice dell'intaglio. Infatti per valori del rapporto  $a/b=20$  essa raggiunge un valore pari al 20% della tensione principale massima.

L'andamento della componente  $\tau_{yz}$  è mostrato in Fig. 7a e 7b per diversi valori del coefficiente di Poisson. La Fig. 7a è riferita al caso  $R=5$  mm mentre la Fig. 7b è riferita al caso  $a/b=5$ . In entrambi i casi si nota come il modo O raggiunga la massima intensità per valori elevati di  $\nu$  mentre l'effetto scompare completamente per  $\nu=0$ .

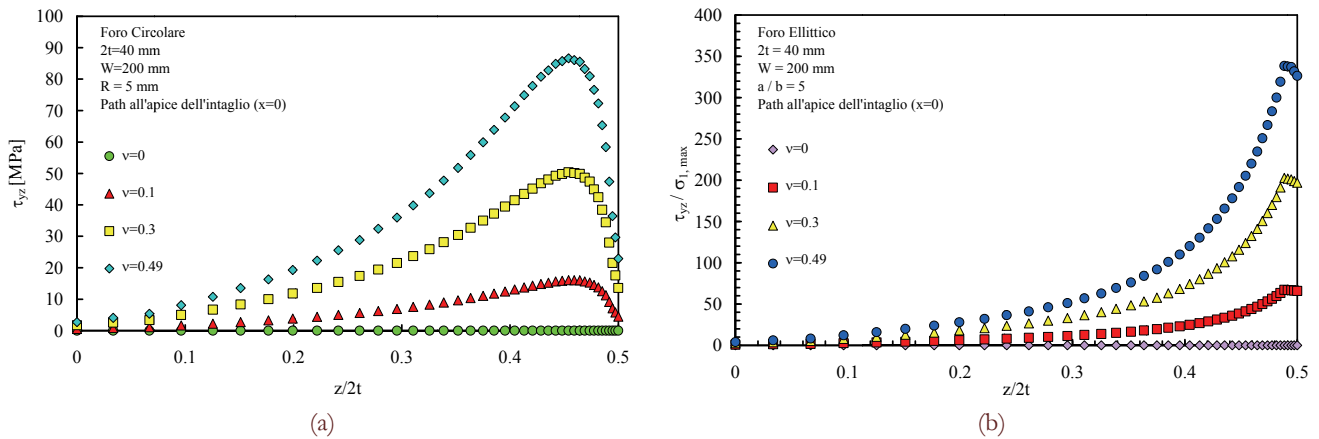


Figure 7: Andamento della tensione  $\tau_{yz}$  (legata al modo O) attraverso lo spessore del componente, al variare del coefficiente di Poisson del materiale. Foro circolare (a) e foro ellittico (b). Stress distribution  $\tau_{yz}$  through the thickness of the plate as a function of the Poisson's ratio. Circular hole (a) and elliptic hole (b).

Foro circolare		$K_{t,2D}$	$K_{t,3D}$		
R (mm)	$\nu=0.1$		$\nu=0.3$	$\nu=0.5$	
1	4.001	4.013	4.159	4.407	
5	4.005	4.024	4.175	4.424	
10	4.002	4.025	4.179	4.425	
20	3.998	4.015	4.215	4.509	
Foro ellittico		$K_{t,2D}$	$K_{t,3D}$		
(b=1 mm)	a/b		$\nu=0.1$	$\nu=0.3$	$\nu=0.5$
5	7.221	7.249	7.715	8.653	
10	12.063	12.312	13.406	15.507	
20	21.689	22.586	25.403	35.219	

Tabella 1: Fattore teorico di concentrazione delle tensioni calcolato per modelli bidimensionali e per modelli tridimensionali. Theoretical stress concentration factor for two-dimensional and three-dimensional models

Infine, in Tab. 1 viene documentata la variazione del fattore teorico di concentrazione delle tensioni ( $K_t$ ) per le due differenti tipologie di intaglio analizzate, sia nel caso bidimensionale che nel caso tridimensionale.  $K_t$  è stato calcolato con la seguente espressione:



$$K_t = \frac{\sigma_{1,\max}}{\tau_{\text{nom}}} \quad (2)$$

Si può notare come anche il fattore teorico di concentrazione delle tensioni risenta pesantemente degli effetti tridimensionali che non risultano affatto trascurabili nei casi analizzati.

## CONCLUSIONI

L'obiettivo del presente contributo è quello di dimostrare l'esistenza del modo O nel caso di componenti tridimensionali intagliati in presenza di raggi di raccordo non nulli. Sono state considerate piastre tridimensionali indebolite da fori circolari ed ellittici.

Le principali conclusioni alle quali si è giunti, grazie alle analisi numeriche effettuate, sono le seguenti:

- La presenza del modo O è stata rilevata nei modelli analizzati ed è risultata essere accoppiata alla sollecitazione di modo II, applicata nominalmente al modello tramite opportune condizioni al contorno.
- La componente di tensione  $\tau_{yz}$  legata al modo O è risultata essere simmetrica rispetto al piano medio del componente. L'intensità è risultata essere fortemente influenzata dal coefficiente di Poisson  $\nu$  del materiale e in particolare essa cresce al crescere di quest'ultimo.
- La tensione principale risulta invece massima al di fuori della bisettrice dell'intaglio. Il punto di picco è posizionato in prossimità della superficie libera nel caso di fori ellittici, mentre nel caso di fori circolari la sua posizione varia attraverso lo spessore in funzione delle dimensioni del foro stesso.
- L'intensità delle tensioni di modo O è influenzata anche dai parametri geometrici (i.e. raggio del foro R e rapporto dei semiassi a/b).
- Il fattore teorico di concentrazione delle tensioni risente degli effetti tridimensionali del modello e risulta essere maggiore del valore ottenuto da un'analisi piana.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] T.R. Kane, R. D. Mindlin, *J. Appl. Mech.*, 23 (1956) 277.
- [2] A. Kotousov, C. H. Wang, *Int. J. Solids Struct.*, 39 (2002) 4311.
- [3] F. Berto, P. Lazzarin, C. H. Wang, *Int. J. Fract.*, 127 (2004) 265.
- [4] Z. Li, W. Guo, Z. Kuang, *Int. J. Solids Struct.*, 37 (2000) 7617.
- [5] Z. Yang, C.B. Kim, C. Cho, H.G. Beom, *Int. J. Solids Struct.*, 45 (2008) 713.
- [6] P. Yu, W. Guo, C. She, J. Zhao, *Int. J. Fatigue*, 30 (2008) 165.
- [7] C. She, W. Guo, *Int. J. Fatigue*, 29 (2007) 330.
- [8] A. Kotousov, P. Lazzarin, F. Berto, S. Harding, *Engng. Fract. Mech.*, 77 (2010) 1665.
- [9] R. J. Hartranft, G. C. Sih, *Int. J. Eng. Sci.*, 8 (1970) 711.
- [10] J. P. Benthem, *Int. J. Solids Struct.*, 13 (1977) 479.
- [11] Z. P. Bazant, L. F. Estenssoro, *Int. J. Solids Struct.*, 15 (1979) 405.
- [12] L. P. Pook, *Engng. Fract. Mech.*, 48 (1998) 367.
- [13] C. She, W. Guo, *Int. J. Solids Struct.*, 44 (2007) 3021.
- [14] P. Yu, C. She, W. Guo, *Int. J. Solids Struct.*, 47 (2010) 2123.
- [15] P. Hutar, L. Náhlík, Z. Knésl, *Int. J. Fatigue*, 32 (2010) 1265.
- [16] T. Nakamura, D. M. Parks, *Int. J. Solids Struct.*, 25 (1989) 1411.
- [17] Z. H. Jin, R. C. Batra, *Engng. Fract. Mech.*, 57 (1997) 343.
- [18] C. S. Huang, *Computers and Structures*, 82 (2004) 1657.
- [19] A. Kotousov, T. L. Lew, *Int. J. Solids Struct.*, 43 (2006) 5100.
- [20] A. Kotousov, *Int. J. Solids Struct.*, 44 (2007) 8259.
- [21] S. Harding, A. Kotousov, P. Lazzarin, F. Berto, *Int. J. Fract.*, 164 (2010) 1.
- [22] F. Berto, P. Lazzarin, A. Kotousov, L.P. Pook, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, *In corso di revisione*.